ANTONII MARII LORGNA IN PUBLICO MILITARI COLLEGIO VERONENSI...

Antonio Mario Lorgna



ANTONII MARII
LORGNA

IN

PUBLICO MILITARI COLLEGIO VERONENSI
MATHES. PROFESS.

De quibusdam Maximis, & Minimis
DISSERTATIO
STATICO-GEOMETRICA.





VERONÆ,
CIƆIƆCCLXVI.

Apud Hæredem Augustini Carattoni Typographi Episcopalis.
SUPERIORUM PERMISSU.



VIRO PRÆCLARISSIMO

PETRONIO MATTEUCCI

I N

Bononiensi Universitate Publico Matheseos Professori, Instituti Scientiarum, & Artium Academico Pensionario, atque in eodem Instituto Astronomi Socio.

A. M. Lorgna F.

Roposuit mihi non ita pridem *D. Torrelli* vir eruditissimus hoc haud inelegans solvendum Problema geometricum: *Dato Circulo datisque ubilibet in eodem circuli plano binis punctis, in ejus peripheria punctum definire tale, ut summa quadratorum, quæ fiunt ex binis rectis a punctis datis ad id punctum coeuntibus, sit omnium minima*. Problema huic quodammodo affine habet Vir Summus *Hospitalius* in sua Analysi Infin. Parv. Sect. III.; Punctum enim in dati Circuli perimetro definiendum sumsit tale, ut summa rectarum ex binis punctis extra ipsum datis in id punctum convenientium sit omnium minima: Quod quidem ad hyperboles constructionem reduxit. Illud ego cum Geometriæ tantum elementaris ope facile solvissem, ansam exinde arripui, vadum generaliter tentandi, ut in linea

quacumque, nedum in Circulo minimum istiusmodi definirem, quotuscumque tandem fuerit punctorum datorum numerus. Neque sane irrito conatu: Plenariam enim solutionem nactus sum perfacili methodo, atque universali, elegantissimi Theorematis statici subsidio, quod mihi sese obtulit, quodque, quantum quidem mihi hactenus innotuit, nullibi memoratum penes Staticorum Scriptores prostat. Ulterius pergendo, occasione ipsa ferente, in eam ipsam incidi, minimi, quod in æquilibrio virium invenitur, considerationem, quam, Præstantissime Vir, peculiari opusculo, eoque peregregio in Comment. Inst. Scient. Bonon. T. IV. inseruisti.

Cum vero animadverterem id ibi tantum in libera puncti attracti directione definiri, clareque perspicerem id ipsum reperiri quoque in directione necessaria, haud inconsultum duxi, legem horumce minimorum generalem una eademque opera demonstrare, Theoremate illo ad id veluti manuducente. Theoremata etiam aliquot admiscui, quæ si nullam aliam ob causam in pretio esse possunt, simplicitate, & novitate tamen tuentur ipsa se, & hoc saltem nomine a Studiosis hominibus forte haud prorsus negligentur. Sed jam quæ fecerim ipsa res indicabit. Quidquid interim id sit, male equidem de te, Vir Illustrissime, meritus essem, nisi tuum plane esse voluerim; Meditatio enim illa tua nostram qualemcumque, hujusmodi in æquilibriis minimorum contemplationem promovendi, industriam suscitavit. Velim igitur lucubratiunculam hanc, quam tibi inscribo, quæque nulla re magis, quam nomine tuo, nixa, in publicum prodit, tibi accipiendam putes, tuamque prorsus facias, si quid in ea consideratione dignum ratus fueris inesse.

Præsterno itaque hujusmodi.

LEMMA.

I. Si in Triangulo a vertice ad punctum quod basim bifariam dividit recta linea ducatur: Quadrata ex lateribus facta æqualia erunt quadratis, quæ fiunt ex basis partibus,

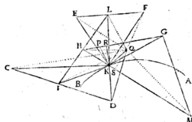
tibus, & duplo quadrato ejus lineæ, quæ a vertice ad basim ducta fuerit.

Demonſtratur ex 12. & 13. Prop. Lib. II. Elem. Eucl.

THEOREMA I.

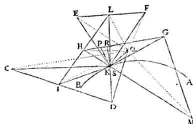
II. Si fuerit linea qualiſcumque, & puncta quotvis in eodem plano extra, vel intra ipſam quomodolibet data veluti centra gravitatis æqualium ponderum inibi conſtitutorum concipiantur, atque a communi eorumdem gravitatis centro ad lineam ductam eſſe intelligatur rectam minimam, vel maximam omnium, quæ ab eodem puncto duci poſſunt, ſumma quadratorum, quæ deſcribuntur a rectis ex iiſdem punctis ad id lineæ punctum convenientibus, erit itidem omnium minima, vel maxima.

Sit AKB linea data; puncta vero data ſint C, D, E, F, G; Jungantur bina quælibet C, D, & biſecetur in I



recta CD; rurſus jungantur bina E, F, biſeceturque in L recta EF: juncta IL, biſectaque in H, erit punctum

H commune gravitatis centrum ponderum C, D, E, F. Jungantur puncta H, G, feceturque in P recta HG ita



ut HP ad PG se habeat reciproce ut punctorum æquegravium numerus in H constitutorum ad punctum G: Erit punctum P commune gravitatis centrum æqualium ponderum C, D, E, F, G. Sit autem K punctum lineæ, in quod minima incidit recta, vel maxima PK a puncto P, Ducantur rectæ CK, DK, EK, FK, GK, & a puncto K ad rectam HG demittatur normalis KR, Dico, summam quadratorum ex CK, DK, EK, FK, GK omnium minimam fore, vel maximam, prout minima, vel maxima fuerit PK.

Quadrata ex CK, DK simul æquantur duplo quadrato ex CI, una cum duplo quadrato ex IK; rursus quadrata ex EK, FK simul æquantur duplo quadrato ex LF una cum duplo quadrato ex LK. Et quoniam rectæ CI, LF ubicumque constituatur punctum K sunt semper eædem, ibi erit summa quadratorum ex CK, DK, EK, FK, GK minima, vel maxima, ubi dupla quadrata ex IK, KL una cum quadrato ex KG minimum, vel maximum conficient. Dupla autem quadrata ex IK, KL æquantur quadruplis quadratis ex IH, HK, & quadruplum quadratum ex HK æquatur quadruplis quadratis ex HP, PK, una cum octuplo Rectangulo HPR; Quadratum vero ex KG æqua-

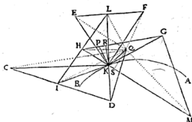
æquatur quadratis ex PK, PG demto duplo Rectangulo GPR. Rursus igitur ibi erit summa quadratorum ex CK, DK &c. omnium minima vel maxima, ubi quadrupla quadrata ex IH, HP, quintuplum quadratum ex PK, octuplum Rectangulum HPR, demto duplo Rectangulo GPR, una cum quadrato ex PG conficient minimum, vel maximum. Quoniam vero PG quadrupla est ipsius HP: octuplum rectangulum HPR æquatur duplo Rectangulo GPR; Ipsæ autem IH, HP, PG sunt semper eædem, ubicumque sit punctum K. Ibi igitur fit summa quadratorum ex CK, DK &c. omnium minima, vel maxima, ubi quintuplum quadratum ex PK fuerit omnium minimum vel maximum, videlicet ubi recta PK a communi gravitatis centro P æque gravium ponderum C, D, E, F, G ad lineam ducta fuerit minima, vel maxima. Si fuerit igitur linea qualiscumque &c. Q. E. D.

THEOREMA II.

III. Cæteris manentibus producatur HK, donec occurrat rectæ GM parallelæ ipsi PK in M, transeatque punctum G in M; quam proportionem habet HP ad PG eamdem habebit HK ad KM, ideoque secta erit HM in K in reciproca ponderum in M, H constitutorum ratione: Quare punctum P abibit in K, eritque K commune gravitatis centrum æque gravium ponderum C, D, E, F, M; Dico, summam quadratorum quæ fiunt ex rectis CK, DK, EK, FK, MK, esse omnium minimam.

Ducantur ad aliud quodlibet plani punctum Q rectæ CQ, DQ, IQ, EQ, LQ, FQ, MQ, & a puncto Q demit-

demittatur ad HM normalis QS: Jungantur puncta KQ. Quadratum ex HQ æquatur quadratis ex HK, KQ una cum



duplo rectangulo HKS; Rursus quadratum ex QM æquatur quadratis ex QK, KM demto duplo rectangulo MKS; Quadruplum igitur quadratum ex HQ una cum quadrato ex QM æquatur quadrato ex KM, quadruplo quadrato ex HK, quintuplo ex KQ una cum octuplo rectangulo HKS, demto duplo rectangulo MKS. Et quoniam HM secta est ita in K ut sit MK quadrupla ipsius HK: Octuplum rectangulum HKS æquatur duplo rectangulo MKS. Erit igitur quadruplum quadratum ex HQ una cum quadrato ex QM æquale quadruplo quadrato ex HK, quintuplo quadrato ex KQ una cum quadrato ex KM: Majus est igitur quadruplum quadratum ex HQ una cum quadrato ex QM, quam quadruplum quadratum ex HK una cum quadrato ex KM; Addito utrinque quadruplo quadrato ex IH, erunt dupla quadrata ex IQ, QL una cum quadrato ex QM majora duplis quadratis ex IK, KL una cum quadrato ex KM; Additis utrinque duplis quadratis ex IC, LE, summa quadratorum ex CQ, DQ, EQ, FQ una cum quadrato ex QM major erit summa quadratorum ex CK, DK, EK, FK, una cum quadrato ex KM.

Eodem modo demonstrabitur quadrata ad aliud quodvis plani punctum similiter facta majora esse quadratis,

quæ

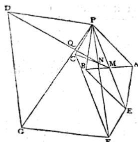
quæ fiunt ad punctum K; Summa igitur quadratorum ex CK, DK, EK, FK, MK, est omnium minima. Q. E. D.

IV. Hinc Problematis Torelliani solutio, & longe quidem ultra quam ex me petebatur. Cæterum me plurimum Viro amicissimo debere profiteor, quod Problemate suo nobilissimas centri gravitatis affectiones eruendi occasionem obtulerit.

V. Hisce positis, sponte quodammodo contemplandum venit minimum, quod in virium æquilibriis invenitur, vel illas punctum aliquod in libera directione sollicitare, vel in necessaria concipias. Sequentia itaque præmittimus.

L E M M A.

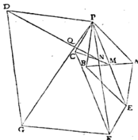
VI. Si vires quotlibet in punctum aliquod mobile, & veluti expers resistentiæ agant pro simplici distantiarum ratione, media omnium directio, vel directio vis ex omnibus compositæ transit semper per commune gravitatis centrum totidem ponderum æqualium constitutorum in extremitatibus rectarum exprimentium tam virium directiones, quam quantitates, recta vero linea, per quam vis ipsa composita designatur, tam multiplex est distantiæ hujusce centri a situ puncti attracti, quotus est numerus virium attrahentium.



Vires sint AP, BP, CP, DP sollicitantes punctum P.

 Su-

Super AP, BP compleatur parallelogrammum APBE, ductaque diagonali PE, super PE, PC compleatur pa-



rallelogrammum PCFE, ductaque diagonali PF, super PF, PD compleatur parallelogrammum PDGF, ducaturque diagonalis PG, quæ erit utique Vis ex omnibus composita. Jungantur puncta A, B, & a puncto M ad C ducta MC diagonalem PF secante in N, jungatur ND secans diagonalem PG in Q, Dico, punctum Q centrum esse gravitatis commune ponderum æqualium A, B, C, D, PG vero quadruplam esse ipsius PQ.

Quoniam enim diagonales PE, AB se mutuo secant bifariam in M, erit M centrum gravitatis commune ponderum A, B; Similia autem sunt Triangula PMN, CNF ob parallelas PM, CF: Quare ut MN ad NC, ita MP ad CF, vel PE ipsi CF æqualem; subdupla est igitur MN ipsius NC, atque ideo secta est MC in N in reciproca ratione ponderum in M, & C constitutorum. In N igitur centrum est commune gravitatis punctorum, A, B, C.

Quoniam vero & PN ad NF se habet ut MN ad NC, atque invertendo, componendo, & rursus invertendo PN ad PF ut MN ad MC, erit PN subtripla ipsius PF. Similia sunt autem Triangula PNQ, DQG ob parallelas PN, DG, ideoque ut NQ ad QD ita PN ad DG, vel ipsi æqualem PF. Se habent igitur inter se invicem NQ, DQ

reci-

reciproce ut numeri ponderum æqualium in N, D constitutorum. Quare erit punctum Q commune gravitatis centrum æque gravium ponderum A, B, C, D. Verum & ipsa PQ ad QG se habet ut NQ ad QD, & ut PQ ad PG ita NQ ad ND. Igitur PG quadrupla est ipsius PQ. Quare si fuerint vires quotlibet in punctum aliquod &c. Q. E. D.

VII. Præstantissimum est hoc Theorema, cujus ope nullo fere negotio vires quotcumque in punctum agentes componuntur, atque media omnium tendentia determinatur. *Wolfius* in Mechan. §. 256. longo satis circuitu ad id demonstrandum usus est; *Martinus* autem in Statices Elem. Cap. IV. ex operoso Theoremate, de quo infra, id ipsum derivavit. Verum ex constructione nostra prono quidem alveo fluit, atque elegans inde, mihique nova elicitur ratio, centrum commune gravitatis ponderum quotcumque æqualium in eodem plano positorum inveniendi, quam liceat enunciare.

PROBLEMA.

VIII. Centrum commune gravitatis ponderum quotcumque æqualium in uno eodemque plano constitutorum invenire.

Sunto A, B, C, D pondera æqualia. Sumatur punctum aliquod P ubilibet in eodem plano, junctisque PA, PB, PC, PD, reliqua peragantur, quæ in Lemmatis constructione facta sunt.

Eadem prorsus, qua ibi usi sumus, methodo demonstrabitur, punctum Q commune esse gravitatis centrum æque gravium ponderum A, B, C, D. Igitur &c.

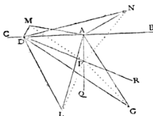
THEOREMA III.

IX. Si fuerint in eodem plano puncta quotvis, veluti totidem centra virium, quæ pun-

 ctum

ctum aliquod, pro distantiarum ratione sollicitent per necessariam, vel liberam directionem, in eo tantum id punctum conquiescet loco, ubi fuerit ad distantiam omnium minimam a communi gravitatis centro totidem æque gravium ponderum in ipsis punctis constitutorum.

Sit punctum A primum in necessaria directione attractum, veluti si cogatur incedere per canale BC, extra quod



egredi non possit, a viribus AM, AN, AL, AG atque in extremitatibus M, N, L, G rectarum, per quas vires illæ, earumque directiones designantur, totidem posita esse intelligatur pondera æqualia, quorum P commune gravitatis centrum. Sit vero a puncto P ducta ad Canale BC recta omnium minima PA, quæ erit utique eidem Canali normalis in A, Dico, punctum mobile in A constitutum conquiescere. Producta enim AP ad partes P, captaque AQ quadrupla ipsius AP, designabit AQ tam directionem, quam quantitatem vis omnibus simul æquipollentis (VI). Perinde igitur est ac si sola adesset vis AQ, punctumqne A per directionem AQ sollicitaret. Et quoniam potentia qua premitur latus Cana-

nalis alia esse non potest, quam quæ punctum sollicitat per directionem eidem Canali normalem, erit eadem AQ Canali BC normalis in A, potentia, qua premitur latus canalis, sive qua punctum A tentat recedere a necessaria directione BC. Nulla igitur adest vis, qua punctum in A constitutum sollicitetur per directionem necessariam BC, quaque promoveri possit; ibi enim actio tota potentiæ omnibus æquipollentis AQ in premendo Canali exeritur; Id vero alibi quam in A contingere nequit, nam ex alio quovis puncto D canalis BC directio potentiæ ex omnibus coalescentis DR, quæque vi Lemmatis per centrum P transire debet obliqua erit directioni necessariæ BC, ideoque resolubilis in laterales, quarum una semper punctum D per Canale promoveri poterit. In unico igitur puncto A directionis necessariæ BC, ad minimam scilicet a communi gravitatis centro ponderum æqualium M, N, L, G distantiam, punctum attractum immotum consistit.

Cæteris manentibus, sublatum concipiatur Canale BC. Jam libere punctum A ad commune gravitatis centrum P æquegravium ponderum M, N, L, G accedere poterit, media virium directione AP. Et quoniam nil impedit quominus cum ipso plane congruat, ibi tantum in directione libera, distantia puncti attracti a centro P fiet omnium minima, ubi ipsa penitus evanuerit, scilicet in puncto P. Verum decrescente distantia AP, ipsa quoque ejusdem AP multiplex AQ in eadem proportione diminuitur: evanescente igitur AP, evanescet pariter ipsa AQ. Quare coincidentibus punctis A, P, nulla est amplius vis, quæ ex potentiarum MP, NP, LP, GP compositione coalescat in P. Æquilibrantur ideo eædem potentiæ inter se mutuo in ipso puncto P, punctumque A in P constitutum conquiescit. Igitur si fuerint in eodem plano puncta quotvis &c. Q. E. D.

X. Perspicuum est, me non monente, notissimum illud Incomparabilis *Leibnitii* Theorema in hoc

nostro

nostro generali contineri, quo scilicet ibi inter vires quotlibet in punctum agentes æquilibrium fieri, conficitur, ubi punctum illud sit commune gravitatis centrum totidem æqualium ponderum existentium in extremitatibus rectarum easdem vires referentium, quodque in Epistola ad *Wallisium* data exposuit, & a nonnullis postea satis operose demonstratum est.

XI. Hisce veluti Lemmatice præmissis, facillime identitas demonstratur puncti, ubi Vires quotlibet inter se mutuo æquilibrantur, cum puncto, in quo minimum illud invenitur, de quo in Theorem. I., & II. disseruimus, neutro ab altero pendente.

THEOREMA IV.

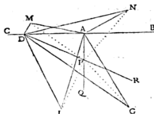
XII. Si vires quotlibet in eodem plano constitutæ punctum aliquod mobile trahant per quamcumque directionem necessariam, vel liberam, ibi summa quadratorum, quæ fiunt a rectis virium illarum trahentium quantitates, & directiones referentibus, est omnium minima, ubi punctum, quod trahitur manet immotum.

Sint enim vires LA, MA, NA, GA, quæ in punctum A per necessariam directionem BC, ex qua egredi non possit, simul agant pro distantiarum ratione, sitque P commune gravitatis centrum totidem æque gravium ponderum in L, M, N, G collocatorum, & recta PA omnium minima, quæ a puncto P ad Canale BC duci possunt.

Jam per ea, quæ in primo Theoremate demonstrata sunt, summa quadratorum, quæ fiunt ex rectis LA, MA, NA, GA est omnium minima; ex præcedenti vero, punctum mobile in A constitutum conquiescere debet. Patet igitur propositum quod ad directionem necessariam.

Patet

Patet etiam in libera; Constituto enim puncto A sic a viribus attracto in ipso gravitatis centro P, sum-



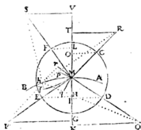
ma quadratorum ex LP, MP, NP, GP fit per Theorema II. omnium minima; ibi autem vi Theorematis præcedentis, id punctum immobile consistit. Ergo si fuerint vires quotlibet &c. Q. E. D.

XIII. Puncta hactenus in eodem plano constituta supposuimus; Verum id ipsum facile demonstrari poterit, si in diversis quoque quomodocumque planis sita concipiantur. Transeo itaque ad alia quædam Theoremata huc pertinentia, quorum consideratio, præcedentium occasione, animum subiit, quæque hoc loco opportunissime cedere videntur.

THEOREMA V.

XIV. Sit curva qualiscumque AMB, per quam incedere concipiatur mobile M a viribus quotcumque MP, MQ, MR, MS &c. in eodem plano quomodocumque sitis, pro distantiarum ratione sollicitatum, extra quam vero egredi non possit,

fit, atque in M id punctum attractum immobile consistat: centro M, atque intervallo quovis MC describatur circulus CDEF, & in punctis C, D, E, F pondera collocentur rectis RM, QM, PM, SM singula singulis proportionalia, dico, rectam MK, quæ per commune gravitatis centrum hujusmodi ponderum in C, D, E, F constitutorum transit, normalem esse Curvæ AMB in M.



Producatur KM, atque ad ipsam normales a punctis P, E, S, F, R, C, Q, D ducantur rectæ PG, EH, SV, FL, RT, CO, QK, DI; Sumatur radius MC pro unitate, & quoniam ex similitudine Triangulorum MCO, MRT, ut MC ad CO, ita MR ad RT, normalis RT, æqualis erit facto ex RM in CO; eodem modo demonstrabitur rectas QK, PG, SV æquales esse factis ex QM in DI, ex PM in EH, ex SM in FL. Quoniam vero transit ex hypothesi recta MK per commune gravitatis

cen-

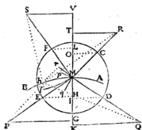
centrum ponderum C, D, E, F, rectis RM, QM, PM, SM, proportionalium, erunt, ex staticis, facta ex PM in EH, & ex SM in FL ex una parte, æqualia factis ex QM in DI, & ex RM in CO ex altera. Igitur & summa normalium PG, SV ex una parte æqualis erit summæ normalium QK, RT ex altera, utpote iisdem factis singulæ singulis æquales. Quare ex statices principiis transibit etiam eadem MK per commune gravitatis centrum ponderum æqualium in P, Q, R, S constitutorum, scilicet in ipsis virium centris. Erit igitur ex præcedentibus recta MK media directio virium PM, QM, RM, SM, quæ cum ex hypothesi in M æquilibrentur, erit eadem MK curvæ AMB normalis in M. Si igitur fuerit AMB curva qualiscumque &c. Q. E. D.

XV. Mire cum iis hæc consentiunt, quæ Marchio *Hospitalius* in Analysi infinite parv. §. 11. Probl. x. demonstravit, etiamsi puncta P, Q, R, S &c. foci non sint, & curva AMB sit qualiscumque.

Ex hoc enim, quod demonstravimus, Theoremate, recta MK, curvæ normalis in puncto æquilibrii M, ita est positione constituta, ut facta ex PM in EH, & ex SM in FL ex una parte æquentur factis ex QM in DI, & ex RM in CO ex altera, hoc est $PM.EH + SM.FL - QM.DI - RM.CO = 0$, ideoque transit ipsa per commune gravitatis centrum ponderum in C, D, E, F collocatorum, atque iis quantitatibus proportionalium, per quas normales CO, DI, EH, FL multiplicantur. Itaque super curvam AB, sumatur arculus Mh infinite parvus, ductisque Ph, Qh, Rh, Sh, centris P, Q, R, S atque intervallis PM, QM, RM, SM describantur arculi circulares Mr, Mq, Mp, Ms; & quoniam anguli IMh, QMq recti sunt, demto utrinque communi angulo IMq, anguli DMI, qMh, in Triangulis MDI, qMh erunt æquales, itidemque anguli in I, & q utpote recti. Quare Triangula DMI, qMh erunt similia. Eodem modo demonstrabitur Triangula MEH, Mrh, item Triangula

C MCO,

MCO, Mph, atque Triangula LFM, Msh esse inter se similia. Cum vero hypothenusæ MC, MD, ME, MF in Triangulis MCO, MDI, MEH, MFL sint inter se æ-



quales, atque itidem hypothenusa MP sit Triangulis omnibus Mph, qMh, Mrh, Msh communis, erunt differentiæ rh, qh, ph, sh rectarum PM, QM, RM, SM inter se invicem ut normales EH, DI, CO, FL. Si igitur loco normalium diferentiæ iisdem proportionales substituantur, ita quoque normalis MK erit constituta ut $PM.rh + SM.sh - QM.qh - RM.ph = 0$. Transit ideo ipsa MK per commune gravitatis centrum ponderum iis quantitatibus proportionalium, per quas differentiæ rectarum PM, SM, QM, RM multiplicantur, atque super ipsas in punctis iisdem E, F, D, C collocatorum: quæ quidem est regula *Hospitaliana*.

Hæc cum superioribus conferens in id, quod sequitur, incidi pulcherrimum, atque generale.

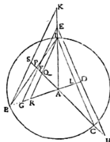
THEOREMA V.

XVI. Vires quotcumque AH, AE, AG &c. in unum idemque punctum mobile pro distan-

diſtantiarum ratione inſimul agentes inter ſe mutuo æquilibrentur in puncto A. Centro A, atque intervallo quolibet AC deſcribatur Circulus CBI, atque in punctis C, B, I, ſuper AH, AG, AE, ſi opus productas pondera conſtituantur Viribus trahentibus AH, AG, AE proportionalia, dico, idem punctum A commune eſſe gravitatis centrum ejuſmodi ponderum in C, B, I conſtitutorum.

Producatur AE, junctiſque GE, EH, BI, ipſi GE ducantur parallelæ IR, BK; & quoniam ratione æquilibrii unaquæque Potentia æqualis eſt, & contraria ei, quæ oritur ex aliarum compoſitione, recta HA producta biſecabit GE in F, rectaſque RI, BK eidem GE parallelas in Q, & S. Triangula igitur BSP, PQI erunt ſimilia, ideoque ut BP ad PI ita BS ad QI, vel QR ipſi QI æqualem. Ita vero BS ad QR ut AB ad AR, vel ut AI ipſi AB æqualis ad AR; Sed ut AI ad AR ita AE ad AG; ita igitur BP ad PI ut AE ad AG, ſcili-

cet in reciproca ponderum in B, I constitutorum ratione. Quare erit punctum P commune gravitatis centrum ponderum B, & I, atque ideo in ipsa PC erit commune gravitatis centrum trium ponderum B, C, I.



Rursus juncta IC, ratione æquilibrii, GA producta rectam EH bifariam secare debet in D. Eodem igitur modo, sectam esse CI in L in reciproca ponderum in I, C constitutorum ratione, demonstrabitur. Quare in ipsa BL erit quoque commune gravitatis centrum trium ponderum B, C, I. Necessario igitur id gravitatis centrum erit in puncto A, utpote utrique ipsarum CP, BL commune.

Si vires ideo quotcumque &c. Q. E. D.

XVI. Extat igitur & alter Canon generalis pro mutuo dignoscendo Potentiarum quotcumque æquilibrio, qui ab illo *Leibnitiano*, quem §. X. memoravimus non pendet.

Cæterum notatu dignum est, quod si in puncto A fuerint inter se mutuo æquilibratæ vires AH, AG, AE, vel in centris virium H, G, E statuas pondera æqualia, vel in C, B, I super easdem AH, AG, AE, si opus productas, ad æquales ab A distiantias, pondera colloces ipsis viribus singula singulis proportionalia, unum idem-

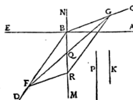
idemque punctum A tam erit commune gravitatis centrum ponderum æqualium H, G, E, quam ponderum viribus trahentibus proportionalium C, B, D.

Præterea quidquid de illo *Leibnitiano* superius dictum est in necessaria mobilium attractorum directione, huic quoque nostro plane competit, utrumque enim perpetuo in una eademque recta consistit, veluti ex Theoremate V. satis apparet.

Interim nonnulla, quæ ulterius pergendo in Dioptricis animadvertere hujusce Meditatiunculæ occasione datum fuit, addere, non abs re fore judicamus.

THEOREMA VII.

XVIII. Sunto ABC, ABD bina media diversæ inter se consistentiæ per planum AE diremta, sitque CB lucis radius in superficiem AE incidens, BD refractus. Si abscindatur a radio refracto quælibet BF, quæ ita se habeat ad BG super incidentem, ut sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis, dico, summam quadratorum, quæ fiunt



ex GB, BF esse omnium minimam, vel mino-

norem, quam ſi fieret ex rectis a G, & F ad aliud quodvis punctum plani AE convenientibus.

Sit enim MN axis incidentiæ: ducatur a puncto F radio incidenti BG parallela FR, junctaque GR, ducatur recta GF. Et quoniam angulus GBR æquatur angulo BRF propter parallelas GB, RF, atque in Triangulo BRF eſt ut BF ad FR ita ſinus anguli BRF ad ſinum anguli RBF, erit quoque ita BF ad FR ut ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refractionis, ſcilicet ut BF ad BG ex conſtructione. Quare FR æqualis eſt ipſi BG, & parallela; Binæ igitur GR, BF ſunt itidem ſibi invicem æquales, & parallelæ, atque GRFB parallelogrammum eſt, ſecantque ideo ſe mutuo bifariam in Q binæ BR, GF. Quadrata igitur ex GB, BF æquantur quadratis partium QF, QG, & duplo quadrato ex QB. Iiſdem vero QF, QG ſemper manentibus, ibi ſuper planum AE quadrata ex GB, BF minimum conficient, ubi minima fuerit QB; Porro Axis incidentiæ MN normalis eſt in B ipſi AE, ideoque QB omnium minima eſt, quæ a puncto Q ad AE duci poſſint. Summa igitur quadratorum ex GB, BF eſt omnium minima. Q. E. D.

XIX. Facile perſpicitur, quælibet ſegmenta ex iiſdem radiis BD, BC ad libitum capta, idem minimum in puncto

cto B conficere nequaquam posse, nisi ita se habuerint ad invicem, ut sinus angulorum GBN, FBM.

XX. Si *Bernoulliana* hypothesi locus esset, atque in ipso incidentiæ puncto æquilibrium concipi posset inter binas Vires inæquales mediorum resistentiis, vel si mavis viribus refractivis proportionales, sponte quodammodo ex hisce nostris Lex proflueret refractionis, ratione quidem, ea, ni fallor, faciliori, qua incomparabilis Vir (Act. Erudit. Lips. An. 1701) ad id demonstrandum usus est.

Sit enim AE superficies refringens, CB radius incidens, BD refractus, ut ante. Designent jam binæ K, P mediorum ABC, ABD diversæ inter se naturæ resistentias, atque in ratione K ad P abscindantur BG, BF a radiis incidente, & refracto. Ponatur nunc cum Bernoullio Vires duas BG, BF inter se mutuo æquilibrari in B, vel ipsas in punctum B secundum directiones BG, BF simul agere concipias trahendo, vel premendo secundum directiones GB, FB. Perinde igitur est ac si punctum incidentiæ B traheretur, vel premeretur in directione necessaria AE a binis viribus BG, BF. Juncta igitur GF, bisectaque in Q, erit punctum Q commune gravitatis centrum binorum ponderum æqualium in F, G constitutorum. Ducatur ex puncto Q ad incidentiæ punctum B recta QB; & quoniam Vires GB, BF inter se mutuo æquilibrantur in B, ex hypothesi, erit QB omnium minima, quæ a puncto Q ad AE duci possint, ideoque ipsi AE normalis in B. Producta igitur hinc & inde QB, erunt GBN, FBM anguli incidentiæ, & refractionis. Quare ducta FR parallela incidenti radio GB, in Triangulis FQR, GBQ propter angulos FQR, FRQ æquales angulis GQB, GBQ, latusque GQ æquale lateri QF, ex constructione, erit FR æqualis ipsi GB. Verum in Triangulo RBF, ut BF ad FR, ita sinus anguli BRF ad sinum anguli RBF, hoc est ut sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis; Ergo ita sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis ut BF ad

BG,

BG, vel ut P ad K ex constructione. Sinus igitur angulorum incidentiæ, & refractionis se habent inter se invicem reciproce, ut mediorum resistentiæ, scilicet in constanti ratione. Q. E. D.

XXI. Pari modo, si e re foret, concessa *causa finali Leibnitiana*, commodissime, brevique demonstratione ex præcedentibus eamdem refractionis Legem derivare liceret. Verum hæc sufficiat indicasse.

FINIS.

